

Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК
Online семинары для студентов 2 курса
(201 группа)

Математический анализ
Функциональные ряды. Занятие 7

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 7

Сычугов Д. Ю.,
группа 201

стр. 1

Теория:

Дано: X -м.во, на котором определены функции $u_n(x)$, $n=1, 2, \dots$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

(1)

Обозначим частичную сумму ряда (1) $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ (2)

Определение 1 Функциональный ряд (1) сходится к функции $S(x)$, $x \in X$ поэлементно, если для $\forall x_p \in X$ сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_p) = S(x_p)$

Символ поэлементной сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightarrow S(x)$ на X

Определение 2 Функциональный ряд (1) сходится к функции $S(x)$ на X равномерно, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$: для $\forall x \in X$ и $\forall n > N(\varepsilon)$ верно $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$. Символ равномерной сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на X

Comment 1 Из равномерной сходимости следует поэлементная.

Док Фикс. $\varepsilon > 0$. Из опр. равномерной сходимости следует, что $\exists N(\varepsilon)$ такой, что для $\forall n > N(\varepsilon)$, $x \in X$ верно $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \Rightarrow$ для $\forall x_p \in X$, тем более $|S_n(x_p) - S(x_p)| < \varepsilon \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_p)$ сход., Доказано

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 7

стр. 2

Comment 2. Обратное, вообще говоря, неверно (будут примеры)

Comment 3. Аналогично строятся определения $\rightarrow$ и $\Rightarrow$ для функциональных последовательностей (с помощью ф-лы (2)).

Comment 4. С практической точки зрения разница между $\rightarrow$ и $\Rightarrow$ следующая. Если нам, например, нужно приближенно вычислить $S(x)$ с помощью ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, $S(x) \approx \sum_{k=1}^n u_k(x)$, до погрешности $\varepsilon > 0$, то:

1) в случае $\rightarrow$ нам надо после задания аргумента x_{φ} определить число $n(x_{\varphi}, \varepsilon)$ такое, чтобы было выполнено $\left| \sum_{k=1}^{n(x_{\varphi}, \varepsilon)} u_k(x_{\varphi}) - S(x_{\varphi}) \right| < \varepsilon$;

2) в случае $\Rightarrow$ нам надо сразу определить $n(\varepsilon)$, такое, чтобы для $\forall x \in X$ было выполнено $\left| \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} u_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon$

Теорема 1 (критерий Коши) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \Rightarrow S(x)$ на $X \Leftrightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall m > n > N(\varepsilon) \text{ и } \forall x \in X \text{ выполнено } |S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$

Критерий Коши не очень удобен на практике. Гораздо более удобен для проверки $\Rightarrow$ следующий критерий.

Теорема 2 (Демидович, 2741) Для равномерной сходимости на мн-ве X последовательности $\{S_n(x)\}$ функций $S(x)$
 (или, что тоже самое, ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, где $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$) $\Leftrightarrow$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \tau_n(x) = 0$, где $\tau_n(x) = |S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - S(x) \right|.$

Доказательство

1) Необходимость. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow S(x)$. Тогда, из определения $\Rightarrow$,
 для $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ такое, что для $\forall n > N(\varepsilon)$ верно для $\forall x \in X$
 $\Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in X} |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \tau_n(x) = 0$ Док

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 7

стр. 4

2) Достаточность Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \tau_n(x) = 0$. Тогда, согласно определению предела, для $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N(\varepsilon)$ верно $\sup_{x \in X} \tau_n(x) < \varepsilon \Rightarrow \forall n > N(\varepsilon) \text{ и } \forall x \in X \text{ верно } |\tau_n(x) - \tau(x)| < \varepsilon$ доказано

2747. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, x \in [0; 1]$
Если $x=0$, то $f_n(0)=0$. Если $x=1$, то $f_n(1)=0$.
Далее, для $\forall x \in (0; 1)$ верно $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n - x^{n+1}) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow f_n(x) \rightarrow 0$,
по крайней мере, поточечно. Есть ли $\Rightarrow$?

$$\tau_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = |f_n(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} (x^n - x^{n+1}). \quad \max = ?$$

$$f'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{n+1} = x_n, \text{ тогда } x_n - \max \tau_n(x).$$

$$\tau_n(x_n) = f(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0; 1]} \tau_n(x) = 0 \Rightarrow \text{Есть } \Rightarrow.$$

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 7

стр. 5

2748

$f_n(x) = x^n - x^{2n}, 0 \leq x \leq 1$. Аналогично $f_n(x) \rightarrow 0$. $\neq ?$

$$\varepsilon_n(x) = |f_n(x) - 0| = x^n - x^{2n}; \quad \sup_{0 \leq x \leq 1} \varepsilon_n(x) = \max_{[0;1]} (x^n - x^{2n}) = \max_{[0;1]} f_n(x);$$

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = 0 \Rightarrow x_n^n = \frac{1}{2} \Rightarrow x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}; \quad f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow \text{Ответ: Если } n \rightarrow \infty, \text{ то нет } \neq$$

2771

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}; \quad 0 < x < \infty \quad ?$$

$$x \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)x+1} \cdot \frac{1}{kx+1} = x \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+1} \cdot \frac{1}{3x+1} + \dots + \frac{1}{(n-1)x+1} \cdot \frac{1}{nx+1} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1} \right) + \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x+1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{nx+1}; \quad \Rightarrow S_n(x) \rightarrow S(x) \equiv 1. \quad \text{В то же время}$$

$$\varepsilon_n(x) = \frac{1}{nx+1} \Rightarrow \sup_{0 < x < \infty} \frac{1}{nx+1} = \frac{1}{n} \neq 0 \quad \text{Ответ: } S_n(x) \rightarrow 1, \neq$$

СЕМЕСТР 1, СЕМНАНАДЦАТЫЙ

смп. 6

2772 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} - ?$, $0 < x < \infty$

$$u_1(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2};$$

$$u_2(x) = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3};$$

$$\dots$$
$$u_n(x) = \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$$

$$\frac{1}{x+1} = S(x)$$

$$r_n(x) = \frac{1}{n+x+1} \Rightarrow r_n(x) \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Остаток: } \Rightarrow$$

НА ДОМ: 2717, 2742, 2751, 2753, 2773

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 7

стр. 7

2773 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)}$?

$$S_n(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{2x}{(1+x)(1+2x)} + \frac{3x}{(1+x)(1+2x)(1+3x)} + \dots + \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)} = ?$$

Заметим, что:

$$u_1(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1};$$

$$u_2(x) = \frac{2x}{(x+1)(1+2x)} = \frac{2x+1-1}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(2x+1)};$$

$$u_3(x) = \frac{3x}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} = \frac{3x+1-1}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} = \frac{1}{(x+1)(2x+1)} - \frac{1}{(x+1)(2x+1)(3x+1)};$$

$$\dots \dots \dots u_n(x) = \frac{nx}{(x+1)(2x+1)\dots(nx+1)} = \frac{1}{(x+1)(2x+1)\dots(n-1)x+1} - \frac{1}{(x+1)(2x+1)\dots(nx+1)},$$

поэтому $S_n(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)(2x+1)\dots(nx+1)} \Rightarrow r_n(x) = \frac{1}{(x+1)(2x+1)\dots(nx+1)}$

1) на $0 < x < \infty \not\Rightarrow$, м.к. $\sup_{x \in [0, \infty)} \frac{1}{(x+1)(2x+1)\dots(nx+1)} = 1 \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

2) на $0 < \varepsilon \leq x < \infty \Rightarrow$ м.к. $\frac{1}{(x+1)\dots(nx+1)} \leq \frac{1}{n! \varepsilon^n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$